Analiza Matematyczna I.2, egzamin, 8 września 2012, 9:05 — 12:20

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Znaleźć kres dolny wartości funkcji $[-1,2] \ni t \mapsto \int_{-1}^{2} x^2|x-t|\,dx$.
Jeśli ten kres jest wartością funkcji, to w jakim punkcie $t \in [-1,2]$?

---

2. Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2} - \sqrt{\cos(2x)}}{x^2 \ln(\cos x)}$.

---

3. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n\cdot n^2}}\Big).$$

---

4. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Dowieść, że ciąg (f_n) funkcji zdefiniowanych wzorami

$$f_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt$$

jest jednostajnie zbieżny na każdym domkniętym przedziale $[a,b]$.

---

5. Obliczyć $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1+x^2n^2}$ lub wykazać, że ta granica nie istnieje.
